**Chủ đề**

5

**CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH**

**3 ĐIỂM THẲNG HÀNG**

# **E.** **CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY – THẲNG HÀNG**

**MỤC LỤC**

[10 phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng 2](#_Toc535260090)

[Ví dụ minh họa 3](#_Toc535260091)

[Dạng 1: chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (tổng hai góc chung đỉnh bằng 180 độ) 3](#_Toc535260092)

[Dạng 2: Sử dụng tính chất đường chéo của hình đặc biệt (vd: hình bình hành) 3](#_Toc535260093)

[Dạng 3: Sử dụng tính chất về tâm và đường kính của đường tròn 3](#_Toc535260094)

[Dạng 4: Tiên đề Ơ-Clit: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. 4](#_Toc535260095)

[Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho. 5](#_Toc535260096)

[Một số bài tập. 11](#_Toc535260097)

Chủ đề vận dụng trong bài toán liên quan đến đường tròn.

**CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG.**

**1. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (1800)**

2. **Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ 3. (Tiên đề Ơclit)**

**3. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.**

**4. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang.**

*Chúc các em học sinh học tập tốt!*

**CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG**

**10 phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng**

1. Chứng minh điểm A thuộc đoạn thẳng BC

**2. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (1800)**

3. Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau.

4. **Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ 3. (Tiên đề Ơclit)**

5. Dùng tính chất đường trung trực: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai đầu đoạn thẳng.

6. Dùng tính chất tia phân giác: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.

**7. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.**

**8. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang.**

9. Sử dụng tính chất tâm và đường kính của đường tròn.

10. Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau.

# **Ví dụ minh họa**

## **Dạng 1: chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (tổng hai góc chung đỉnh bằng 180 độ)**

**Bài 1:** Cho tam giác  có các góc  và  nhọn, đường cao . Dựng ra phía ngoài tam giác  các tam giác vuông cân , (). Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng , , thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Dựng hình bình hành .

 là trung điểm của(t/c hình bình hành) và .

Mặt khác  (gt);  (cùng bù với ).

 (c – g – c).

 ( Hai góc tương ứng).

Mà 

.

 hay , , thẳng hàng.

## **Dạng 2: Sử dụng tính chất đường chéo của hình đặc biệt (vd: hình bình hành)**

**Bài 2:** Cho có trực tâm  nội tiếp  đường kính , gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng , ,  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

, (suy từ giả thiết).

.

Mà (cùng vuông góc với ).

 là hình bình hành.

 cắt  tại trung điểm của  và (t/c hình bình hành).

Suy ra , , thẳng hàng.

## **Dạng 3: Sử dụng tính chất về tâm và đường kính của đường tròn**

**1. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền**

**2. Đường kính của đường tròn thì đi qua tâm.**

**Bài 3:** Cho  đường kính . Điểm  chuyển động trên , ;. Kẻ  vuông góc với . Vẽ đường tròn  đường kính  cắt đường thẳng  và  tại  và . Chứng minh rằng:

a) , ,  thẳng hàng.

b)  nội tiếp.

**Hướng dẫn giải**

a)Ta có :

** (góc nội tiếp chắn nửa ).

**.  là đường kính của .

Suy ra , ,  thẳng hàng.

b)  là hình chữ nhật nội tiếp .

 ( góc nội tiếp cùng chắn).

Mà .

Vậy  nội tiếp.

**Dạng 4: Tiên đề Ơ-Clit: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.**

* **Nếu qua điểm *M* nằm ngoài đường thẳng *a* có 2 đường thẳng song song với *a* thì chúng trùng nhau.**
* **Cho điểm *M* ở ngoài đường thẳng *a*. Đường thẳng đi qua *M* và song song với *a* là duy nhất.**

**Bài 4:** Cho hình chữ nhật  có  là giao điểm  đường chéo. Điểm trên đoạn , lấy  đối xứng với  qua ; là hình chiếu của điểm  trên , vẽ hình chữ nhật . Chứng minh , ,  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là giao điểm của  và .

,,  thẳng hàng (t/c hình chữ nhật).

Cần chứng minh: ,, thẳng hàng.

(gt) và (t/c hình chữ nhật).

 là đường trung bình của .

( góc đồng vị).

Mà  và (vì cân tại , cân tại , t/c hình chữ nhật).

 mà (dolà đường trung bình ).

, ,  thẳng hàng (tiên đề Ơclít).

Kết hợp với ta có: , ,thẳng hàng.

**Bài 5:** Cho  nhọn, các đường cao ,  và. Gọi , , ,  thứ tự là hình chiếu của  trên , ,  và . Chứng minh , , ,  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

+ Từ (gt) ; (định lý Talét).

 (định ký Talét đảo).

+ Chứng minh tương tự ta có: 

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông và ta có:

  mà  (vì (g.g)).

 hay . (định lý Talét đảo)

Kết hợp với , ta có:

, ,  thẳng hàng và , ,  thẳng hàng (tiên đề Ơclít).

Do đó , , ,  thẳng hàng.

## **Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.**

* **Nếu qua điểm *M* nằm ngoài đường thẳng *a* có 2 đường thẳng vuông góc với *a* thì chúng trùng nhau.**
* **Cho điểm *M* ở ngoài đường thẳng *a*. Đường thẳng đi qua *M* và vuông góc với *a* là duy nhất.**

**Bài 6:** Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho . Từ A vẽ tiếp tuyến AB của đường tròn (O) (B là tiếp điểm).

1) Chứng minh tam giác ABO vuông tại B và tính độ dài AB theo R

2) Từ B vẽ dây cung BC của (O) vuông góc với cạnh OA tại H. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) Chứng minh tam giác ABC đều.

4) Từ H vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại D. Đường tròn đường kính AC cắt cạnh DC tại E. Gọi F là trung điểm của cạnh OB. Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

1) Ta có:  (AB là tiếp tuyến của(O) tại B)

⇒ ΔABO vuông tại B

⇒  (Đ/L Pytago)

⇒  ⇒ 

lop9hki20122013 hhh2) Ta có ΔBOC cân tại O (OB = OC = R)

Mà OH là đường cao ( BC ⊥ OA tại H)

⇒ OH là đường phân giác của ΔBOC

⇒ 

Chứng minh ΔAOC = ΔAOB (c-g-c)

⇒ 

Mà  (AB là tiếp tuyến của(O) tại B)

⇒ 

* AC ⊥ OC
* Mà C thuộc (O)

⇒ AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

3) Chứng minh ΔABC cân tại A ( 1)

Xét ΔABO vuông tại 0, có



⇒ 

Ta có: AO là tia phân giác của góc BAC (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

⇒  (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABC đều

1. Gọi I là giao điểm của AF và HD

Áp dụng hệ quả Talet để I là trung điểm HD

Gọi K là trung điểm BD

Chứng minh KI là đường trung bình của ΔBHD

⇒ KI // HB

Mà HB ⊥ OA tại H (gt)

⇒ KI ⊥ AH

Chứng minh I là trực tâm của ΔAHK

* AI là đường cao của ΔAHK
* AF ⊥ HK (3)

Chứng minh HK là đường trung bình của ΔBDC

* HK // CD (4)

Từ (3) và (4)

⇒ AF ⊥ CD

Ta có: ΔAEC nội tiếp đường tròn đường kính AC

⇒ ΔAEC vuông tại E

⇒ AE ⊥ CD

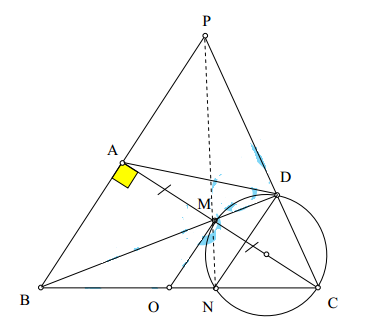
Mà AF ⊥ CD

Vậy Ba điểm A, E, F thẳng hàng

**Dạng 5: Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.**

**Bài 7:** Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N. Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D.

1) Chứng minh tứ giác BADC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn đó.  
2) Chứng minh DB là phân giác của góc ADN.  
3) Chứng minh OM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MC.  
4) BA và CD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

a) (gt) nên tứ giác BADC nội tiếp đường tròn tâm O là trung điểm của BC.

b)  (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung trong các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BADC, NMDC) nên DB là phân giác góc AND.

c) OM ⊥ AC (OM là đường trung bình tamgiác ABC) nên suy ra MO là tiếp tuyến đường tròn đường kính MC.

d) MN ⊥ BC (góc MNC nội tiếp nửa đường tròn đường kính MC)

PM ⊥ BC (M là trực tâm tam giác PBC)  
Suy ra P, M, N thẳng hàng.

**Bài 8: Tuyển sinh 10 Hà Nam 15 – 16**

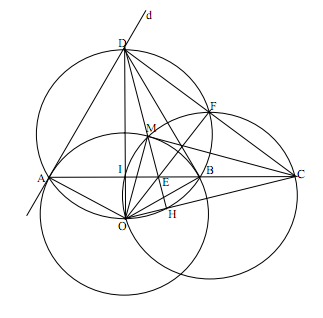
Cho đường tròn (O) và điểm A nằm trên đường tròn. Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên d lấy điểm D (D không trùng với A), kẻ tiếp tuyến DB của (O) (B là điểm, B không trùng với A).

a) Chứng minh rằng tứ giác AOBD nội tiếp.

b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Kẻ DH vuông góc với OC (H thuộc OC). Gọi I là giao điểm của AB và OD. Chứng minh rằng OH.OC = OI. OD

c) Gọi M là giao điểm của DH với cung nhỏ AB của (O). Chứng minh rằng CM là tiếp tuyến của (O)

d) Gọi E là giao điểm của DH và CI. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính OD và đường tròn ngoại tiếp tam giác OIM. Chứng minh rằng O, E, F thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

a) DA và DB là các tiếp tuyến của (O) nên 

Xét tứ giác AOBD có  , mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác AOBD nội tiếp

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có DA = DB và DO là tia phân giác của ABD

Do đó tam giác ABD cân tại D có DO là đường phân giác nên đồng thời là đường trung trực....

Xét ∆OIC và ∆OHD có  ;  chung nên

 (g.g)



c) Xét tam giác AOD vuông tại A có AI là đường cao nên  (2)

Mà OM = OA (là bán kính (O) ). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra OM2 = OH. OC 

Xét ∆OHM và ∆OMC có chung  ;  nên  (c.g.c).

=> nên CM là tiếp tuyến của (O).

**d)** Do nên tứ giác OIMC nội tiếp đường tròn đường kính OC.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác CIM là đường tròn đường kính OC.

=> 

Mặt khác ta có  Như vậy OFC;OFD kề bù suy ra ba điểm C, F, D thẳng hàng.

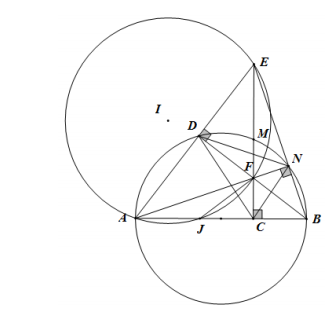
Xét tam giác OCD có ba đường cao CH, DI, OF mà có E là giao điểm CH, DI nên ba điểm O, E, F thẳng hàng.

**Bài 9: Tuyển sinh 10 Hải Dương 15 – 16**

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố dịnh thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh AD. AE = AC.AB

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp ∆ CDN

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ∆ AEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB

**Hướng dẫn giải**

a) Có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

 ( cùng phụ góc BAE)

=> Tam giác ADB đồng dạng với tam giác ACE(g-g)



b) Có AN ⊥ EB, EC ⊥ AB , EC giao AN tại F nên F là trực tâm của tam giác AEB

⇒ BF ⊥ EA

Mà BD ⊥ EA ⇒ B, D, F thẳng hàng

+ Tứ giác ADFC có hai góc đối bằng 90o nên là tứ giác nội tiếp, suy ra 

Tương tự ta có: 

Mà  (cùng phụ với góc AEB) =>

Suy ra CF là phân giác của góc DCN

Tương tự ta cũng có DF là phân giác của góc NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DCN

c) Gọi J là giao của (I) với đoạn AB.

Có  => tam giác FAC đồng dạng với tam giác BEC(g-g)

=>

Vì AEFJ là tứ giác nội tiếp nên 

=>  (g-g) => 

Suy ra  ⇒ BC = CJ ⇒ C là trung điểm BJ (vì J ≠ B)

Suy ra J là điểm cố định

Có  nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ, là đường cố định.

# **Một số bài tập.**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O’) đường kính AC tại D, M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt đường tròn (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh O, N, O’thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Xét (O’) có:  ( góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).

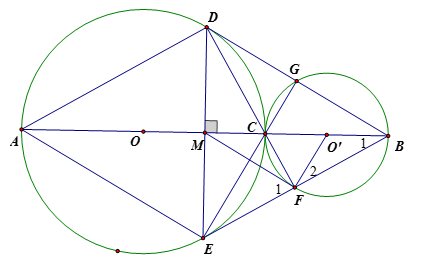
( góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) .

Suy ra ⇒ tam giác ABE cân tại B nên BN vừa là đường cao vừa là trung tuyến ⇒ NA = NE và OA = OB, O’A = O’C ⇒ NO, NO’ là đường trung bình của tam giác ACE, ABE nên O’N // CE, NO // EB do đó O, N, O’ thẳng hàng.

**Bài 2:** Hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại  gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn  và . DE là dây cung của đường tròn  vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Tia DC cắt đường tròn  tại điểm thứ 2 là F

a) Tứ giác ADBE là hình gì? Vì sao?  
b) Chứng minh ba điểm B, F, E thẳng hàng  
c) DB cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là G. Chứng minh DF, EG và AB đồng quy  
d) Chứng minh MF là tiếp tuyến của 

**Hướng dẫn giải**



a) Tứ giác ADBE là hình thoi vì AM = MB; MD = ME và   
b) Ta có . Nối BF ta có . Như vậy  và  mà qua B chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với DA do đó 3 điểm B, F, E phải thẳng hàng  
c) Ta có CG vuông góc với DB, mặt khác EC vuông góc với DB. Nhưng qua C chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với DB nên E, C , G phải thẳng hàng và DF, EG, AB phải đồng quy tại điểm C, chính là trực tâm tam giác EDB  
d) Nhận thấy  và  mà  nên , suy ra . Vậy MF là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm O’.

**Bài 3:** Cho nửa đường tròn đường kính AB trên đó có một điểm M. Trên đường kinh AB lấy một điểm C sao cho . Trên nửa mặt phằng bờ AB có chứa điểm M, người ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB; đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax tại P; đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q. Gọi D là giao điểm của CP và AM; E là giao điểm của CQ và BM

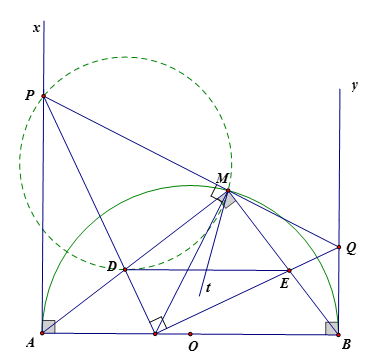
a) Chứng minh rằng các tứ giác ACMP, CDME nội tiếp được

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB, DE song song

c) Chứng minh rằng ba điểm P,M, Q thẳng hàng

d) Ngoài điểm M ra, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ còn điểm chung nào nữa không? Vì sao?

**Lời giải:**

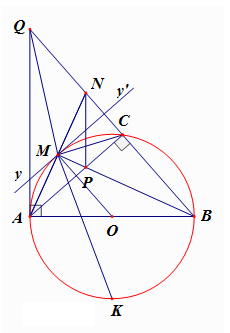


a) Tứ giác ACMP có  nên nội tiếp được  
Tứ giác CDME có  nên nội tiếp được  
b) Do các tứ giác ACMP và CDME nội tiếp được nên ,  mà  ( vì cùng phụ với góc ) nên . Vậy AB song song với DE  
c) Do  ( vì cùng phụ ) và  nên . Suy ra tứ giác CMQB nội tiếp do đó . Vậy P, M, Q thẳng hàng  
d) Trên nửa mặt phẳng bờ MC không chứa điểm D , kẻ tia tiếp tuyến Mt của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMP suy ra mà phụ với  nên . Suy ra Mt tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMQ. Do đó hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP và EMQ tiếp xúc nhau. Vậy có duy nhất một điểm M là điểm chung của hai đường tròn nói trên

**Nhận xét.** Bạn có thể chứng minh được DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ

**Bài 4:** Cho đường tròn (O) đường kính AB=2R và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC; P là giao điểm của AC, BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N và Q  
a) Chứng minh tam giác ABN cân   
b) Tứ giác APNQ là hình gì? Vì sao?   
c) Gọi K là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Hỏi có thể xảy ra ba điểm Q, M, K thẳng hàng không? Vì sao?   
d) Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O).

**Hướng dẫn giải**



a) Tam giác  có đường cao BM đồng thời là đường phân giác nên tam giác ABN cân tại B.

b) Vì P là trực tâm tam giác ABN nên NP  AB  NP // AQ, do đó APNQ là hình thang.

c) Nếu Q , M , K thẳng hàng thì từ tính chất góc có đỉnh bên ngoài đường tròn, ta có QM là đường phân giác của góc AQB. Mặt khác , BM là phân giác của góc ABQ nên AM là phân giác của góc BAQ, vô lý. Vậy ba điểm Q , M , K không thẳng hàng.

d) Tại điểm M, kẻ tiếp tuyến yMy’ với (O) sao cho My và MA cùng phía với đường thẳng MQ. Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi yMy’ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tại M. Điều đó tương đương với 

( vì  cân).

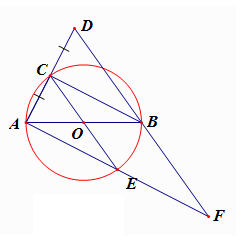
Mà 

.

Vậy  thì đường tròn ngoại tiếp  tiếp xúc với (O).

**Bài 5:** Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = AC   
a) Chứng minh tam giác ABD cân   
b) Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho EF= AE. Chứng minh ba điểm D, B, F thẳng hàng   
c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF tiếp xúc với đường tròn (O)

**Hướng dẫn giải**



a) Xét  có  nên BC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, do đó  cân tại B.

b)  nên CE là đường kính của đường tròn (O)  C, O, E thẳng hàng.

Ta có CO là đường trung bình của tam giác ABD

 CO//DB  CE// BD.

Tương tự, OE là đường trung bình của 

 OE//BF  CE//BF.

Suy ra B, D, F thẳng hàng ( theo tiên đề Owclit).

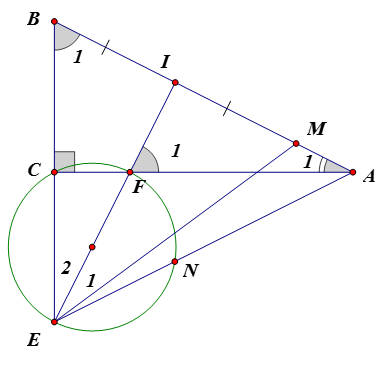
c) Theo tính chất đường trung bình của  ta có  mà 

 B là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF  BA là bán kính.

Mà  nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF tiếp xúc với đường tròn (O) tại A.

**Bài 6:** Cho tam giác ABC vuông tại C và BC < CA. Gọi I là điểm trên AB và IB < IA. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt là F và E. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I.  
a) Chứng minh rằng tam giác IME đồng dạng với tam giác IFA và IE. IF = IA. IB   
b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh rằng F, N, B thẳng hàng.  
c) Cho AB cố định, C thay đổi sao cho . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng cố định

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có IE là đường trung trực của BM   
cân tại M  
Mà  ( cùng phụ với )  
  
  
  
b) Ta có   
Xét  có EI, AC là các đường cao cắt nhau tại F nên mà   thẳng hàng  
Ta có suy ra tứ giác AMFE nội tiếp  
Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn qua hai điểm A, M cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định

**Bài 7:** Cho tam giác  nhọn nội tiếp đường tròn . Các đường cao  và  của tam giác  cắt nhau tại . Vẽ đường kính  của đường tròn .

1. Chứng minh 
2. Chứng minh tứ giác  là hình bình hành
3. Vẽ  tại . Chứng minh  thẳng hàng
4. Gọi  là trọng tâm của tam giác.

Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

1.  nội tiếp đường tròn đường kính .

 vuông tại 

Ta có: 



1.  (câu a)

Chứng minh tương tự câu a)

Có: 

Tứ giác  có 

Và  nên là hình bình hành.

1.  (gt)

 là trung điểm của  (Định lý đường tròn vuông góc dây cung)

Tứ giác  là hình bình hành,  là trung điểm của  nên là  trung điểm của .

 thẳng hàng.

1. Tứ giác  có  là đường trung tuyến,  là trọng tâm (gt)

 thuộc đoạn thẳng , .

Tam giác  có  là đường trung tuyến,  thuộc đoạn thẳng , 

 là trọng tâm của tam giác  và  là đường trung tuyến của tam giác .

 đi qua , .

Hai tam giác  có chung đường cao vẽ từ  đến .

Do đó .

**Bài 8:** Cho tam giác  có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn . Đường cao  của tam giác  cắt đường tròn  tại  (khác ). Từ  vẽ đường thẳng song song với  cắt đường tròn  tại điểm  (khác ).

1. Chứng minh rằng  là thẳng hàng.
2. Chứng minh rằng tư giác  là hình thang cân.
3. Tính  theo .

**Hướng dẫn giải**

1.  (gt),  (gt)





 là đường kính của đường tròn 

 thẳng hàng.

1. Vẽ 

 cắt  tại 

 (gt) có , tứ giác  là hình thang

 là trung điểm 

 là trung điểm 

 là trục đối xứng của hình thang cân

1.  ( là hình thang cân)

 là đường kính nên 

 vuông tại , theo định lí Py-ta-go có:







Chứng minh tương tự có: 

Ta có: 

**Bài 9:** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại  và . Vẽ các đường kính  và 

a) Chứng minh rằng  thẳng hàng

b) Đường thẳng  di động qua  cắt  lần lượt tại  ( khác ,  nằm giữa )

1. Chứng minh rằng 
2. Xác định vị trí  để chu vi tam giác  lớn nhất, diện tích tam giác  lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

a)  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



Tương tự có 

Suy ra  thẳng hàng.

b) 1) Xét  và  có:

 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  của đường tròn )

 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  của đường tròn )

Do đó 

2) \* ( kí hiệu *CV = chu vi*)

 ,  không đổi

Do đó:  lớn nhất  lớn nhất

 là đường kính của đường tròn 

 tại 

Vậy khi  vuông góc với  tại  thì chu vi tam giác  lớn nhất.

\*  

,  không đổi

 lớn nhất  lớn nhất

 lớn nhất

 là đường kính của đường tròn 

 tại 

Vậy khi  vuông góc với  tại  thì diện tích tam giác  lớn nhất.

**Bài 10:** Trên cạnh  của hình vuông , lấy một điểm , vẽ đường tròn tâm  đường kính . Gọi  là giao điểm của đường tròn tâm  đường kính . Hai đường tròn cắt nhau tại điểm thứ hai . Tia  cắt  tại . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm  thẳng hàng

b) 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có  là giao điểm thứ nhất của  và 

Dễ thấy  là hình chữ nhật và  là đường kính của 

Nên  (góc nội tiếp chắn nửa cung đường tròn)

Mặt khác  là đường kính của 

nên  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

 hay ba điểm  thẳng hàng.

Ta có  là hình chữ nhật

 là hình chữ nhật

 (1)

Xét  và  có

 (hai góc cùng phụ với góc )

 (gt)

Do đó:  (g.c.g)

 (2)

Từ (1) và (2)

 hay  cân có  là đường phân giác

 cũng đồng thời là đường cao.

Vậy .

**Bài 11:** Cho đường tròn ,  là điểm ở ngoài , hai tiếp tuyến  và  (, là hai tiếp tuyến),  là một điểm trên đường tròn tâm  bán kính  và nằm trong đường tròn . Các tia  và  cắt đường tròn  lần lượt tại  và .

Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Trong đường tròn  ta có: 

Mặt khác trong đường tròn  có:

 (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung).

 (1)

Tương tự ta có:  (2)

Do  và  là tiếp tuyến của  nên:



Hay 



Hay  (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: 

Vậy ba điểm  thẳng hàng.

**Bài 12:** Gọi  là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ;  lần lượt là hình chiếu của  trên các đường thẳng ,  và .

Chứng minh rằng:

a) Các điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Các điểm  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

a)  Tứ giác  nội tiếp.

 Các điểm  cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh tương tự a) có tứ giác  nội tiếp



Mà  (tứ giác  nôi tiếp)

Và (tứ giác  nội tiếp)

Do đó: 

Ta có:   thẳng hàng.

*Tổng hợp bởi Toán Họa – 0986 915 960*

*Nguồn bài tập: Các sách tham khảo, các đề thi.*